1.9. Determinant

$n \times n$ boyutlu bir A matrisinin determinantı, n elemanının mümkün olan tüm çarpımlarının toplamaları şeklinde tanımlanan bir skaler fonksiyonudur. A matrisinin determinantı $|A|$ ile veya $\det(A)$ ile gösterilir.

* $A = [a]_{1\times 1}$ ise $|A| = a$ 'dır.

* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise $|A| = ad - bc$ 'dir.

* Tekil matrislerin determinantı 0'dır.

* $|A| > 0$ ise A matrisi pozitif tanımlıdır.

* $|A'| = |A|$

* A tekil olmayan bir matris ise $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ 'dır.

$n \times n$ tipinde bir matris ile bir skaler çarpılırsa determinant,

$$|cA| = c^n |A|$$ şeklindedir.

$$2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 10.8 - 16.6 = -16$$

$$2^2 . (-4) = -16$$

Teorem A kare matrisi aşağıdaki gibi parçalanırsa,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A_{11} ve A_{22} matrisleri kare matrisler ve tekil olmayan matrisler ise,

$$|A| = |A_{11}|\,|A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|$$

$$= |A_{22}|\,|A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}|$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 1:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{veya} \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

olduğunu düşünelim. Burada A_{11} ve A_{22} kare matrisler olsun. Her iki durumda da,

$$|A| = |A_{11}|.\,|A_{22}| \quad \text{dir.}$$

Teorem

Eğer A ve B matrisleri aynı boyutta birer kare matrisler ise çarpımın determinantı determinantlar çarpımına eşittir.

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

Sonuç 1

$$|AB| = |BA|$$

Sonuç 2

$$|A^2| = |A|^2$$

ÖR 7

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verilsin.

$$AB = \begin{bmatrix} 1.3 + 2.1 & 1.(-2) + 2.2 \\ 3.3 + 4.1 & 3.(-2) + 4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$$

$|AB| = -16$, $|A| = -2$, $|B| = 8$

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

$$-16 = -16 \checkmark$$

sonuçları elde edilir.

Sarrus Kuralı

$A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ biçimindeki matrislerin determinantı bulmak için Sarrus kuralı kullanılır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \leftarrow$

$a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \leftarrow$

$a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} \leftarrow$

$+$ ______

T_2

$\rightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

$\rightarrow a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$

$\rightarrow a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$

$+$ ______

T_1

$\det(A) = T_1 - T_2$ 'dir.

NOT

- Bir satır veya sütunun tüm elemanları sıfır olan matrislerin determinantı sıfırdır.

- Herhangi iki satır veya iki sütunun elemanları eşit olan matrisin determinantı sıfırdır.

- ~~Gauss Eleme Yöntemi~~
- ~~CHIO Yöntemi~~